

SYMBOLINEN LASKENTA

JOONAS ILMAVIRTA

HARJOITUSTYÖN OHJE, SYKSY 2016

Harjoitustyö tehdään vaiheittain. Myöhemmät palautettavat tehtävät rakentuvat aiempien päälle.

Tehtävät on jaettu tehtäväpaketteihin. Numeroidut tehtäväpaketit 1–7 käydään läpi viikoittaisissa pääteohjauksissa (harjoituksissa). Nämä tehtävät täytyy (lähes) kaikki tehdä lopputyöhön.

Lisäksi on aakkosilla varustettuja vapaavalintaisia paketteja, joista voi valita mieleisiään.

Muotoiluohjeita ja lisätietoja löytyy kurssin sivuilta:

<http://users.jyu.fi/~jojapeil/opetus/symbolinen/>

Lämmittely. Ensimmäisenä palautetaan lämmittelytehtävä. Ota harjoitustyön pohjaksi laadittu L^AT_EX-dokumentti kurssin sivuilta ja lisää siihen omat tietosi. Kirjoita siihen, mitkä suuntautumisvaihtoehdoista kiinnostavat sinua eniten ja mihin aiot keskittyä.

Laadi yksinkertainen ohjeiden mukaan muotoiltu Maxima-dokumentti (anna kuvaava nimi, kuten `SL_lammittely_sukunimesi.wxm`), jossa on vähintään kolme täysin vapaavalintaista tehtyä tehtävää. (Tähän ei lasketa ensimmäisen tehtäväpaketin alun L^AT_EX-tehtäviä.)

Puolikas harjoitustyö. Seuraavaksi palautetaan puolikas harjoitustyö. Sisällytä siihen tehtäväpaketit 1–3 kokonaan sekä valitsemasi vähintään 5 muuta tehtävää.

Vertaisarvio. Saat luettavaksesi kahden muun opiskelijan puolikkaan harjoitustyön. Anna niistä palautetta erikseen annettavien ohjeiden mukaan.

Lopullinen harjoitustyö. Lopullinen harjoitustyö sisältää tehtäväpaketit 1–7 sekä valinnaisia tehtäviä niin paljon, että tehtäviä on yhteensä ainakin 50.

Tehtäväpaketeista 4–6 voit jättää korkeintaan viisi pakollista tehtävää väliin jos ne tuntuvat liian vaikeilta. Korvaa tällöin ne muilla tehtävillä.

Palaute. Jotta suoritusmerkinnän saa, täytyy kurssista antaa palautetta. Ohjeet tulevat kurssin lähestyessä loppuaan.

Palautettavat tiedostot. Jokaisessa palautettavassa harjoitustyön vaiheessa (lämmittely, puolikas, lopullinen) palautetaan kaksi tiedostoa:

- pdf-tiedosto, jonka teet L^AT_EX:lla ja
- wxm-tiedosto, johon on koottu kaikki palautettavat Maxima-tehtävät.

Varmista, että molempien tiedostojen *nimessä* kerrotaan sukunimesi ja se, mistä harjoitustyön osasta on kyse.

Vertaispalautteen antamisesta ohjeistetaan myöhemmin.

1. YLEISOHJEITA

- Yritä tehdä kunkin viikon tehtävät ennen pääteohjauksia. Jos tulee ongelmia, osaat kysyä itsellesi hyödyllisempiä kysymyksiä opettajalta.
- Maximan dokumentaatiosta on paljon apua, vaikka se onkin paikoin sekava. Jos klikkaat kirjoittamaasi Maxima-komentoa (vaikkapa `ev`) ja painat F1, saat ohjeen kyseisestä komennosta.
- Opetuksen päättymisestä harjoitustyön palauttamisen aikarajaan on reilu viikko aikaa. Tuolla viikolla kurssin molemmat opettajat ovat matkoilla, joten ohjausta saa rajoitetusti. Tee tehtäviä ajoissa!
- Luennoilla ei ole tiukkaa aikataulua. Toiveita, kysymyksiä ja kommentteja saa mieluusti esittää.

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) kommentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

Ensimmäiset tehtävät liittyvät L^AT_EX-ladontaohjelmaan. Niiden suorittamisesta ei tarvitse kirjoittaa palautettaviin suorituksiin mitään. Tosin tehtävän 3 suorittamista tarvitset tehtävien palauttamiseen. Näiden tehtävien tekeminen omalla koneella vaatii ladontajärjestelmän asentamista, mikä ei välttämättä suju ongelmitta. Opettajat koittavat auttaa – ja suosittelevat yliopiston koneita.

Huomautus: Tästä tehtäväpaketistä voit ottaa lopulliseen harjoitustyöhön mukaan vain tehtävät 7–9.

1. **L^AT_EX.** Etsi kurssin sivuilta tiedosto `karvalakki.tex` ja tallenna se johonkin omaan kansioosi¹. Avaa TeXworks-ohjelma² ja avaa tämä tiedosto kyseisellä ohjelmalla. Tämä on karvalakkiversio L^AT_EX-dokumentista. Valitse vihreän nuolen vierestä alavetovalikosta ”pdfLaTeX”. Paina vihreää nuolta (”typeset”), ja L^AT_EX luo sinulle pdf-tiedoston. Kansioosi ilmestyy kasa karvalakki-tiedostoja, joista yksi on `karvalakki.pdf`, jonka pitäisi aueta automaattisesti. Olet luonut ensimmäisen L^AT_EX-dokumenttisi!
2. **L^AT_EX.** Tee edelliseen tiedostoon muutoksia. Kirjoita ”Moi!”-kohtaan lisäksi tai tilalle pari sanaa muuta tekstiä. Lisää myös $f(x)=\sin^2 x$. Paina vihreää nappia ja saat uuden pdf:n.
3. **L^AT_EX.** Etsi kurssin sivuilta tiedosto `ht-pohja.tex`. Muuta ensin tiedoston nimi nimi muotoon `ht-sukunimesi.tex`, missä on oma sukunimesi ilman ääkkösiä. Avaa tiedosto TeXworksilla. Tee siitä tuttuun tapaan pdf-tiedosto.
Lue tämä tiedosto ja muokkaa sinne omat tietosi. Tämä pdf-tiedosto pitää palauttaa harjoitustyön joka vaiheessa. Tiedosto venyy hiljalleen kurssin mittaan.
4. Käynnistä wxMaxima, kirjoita ikkunaan laskutoimitukseksi vaikka $1+1$, päätä syöterivi puolipisteeseen (;) ja suorita laskutoimitus (=paina `<shift>+<return>` tai `<enter>`).

¹Tätä kurssia varten kannattaa luoda omalle U-asemalle kansio, koska tiedostoja tulee.

²Muitakin editoreita saa käyttää. On kuitenkin kätevää, että editorista voi suoraan käskyttää kääntäjää.



5. Laske vaativampia laskutoimituksia, vaikkapa suuria kertolaskuja ja potenssiin korotuksia. Kertolaskuun tarvittavat merkit $*$ (returnin vieressä) ja potenssiin korotukseen $^$ (=aksenttimerkki välilyöntimerkin päälle, tai $**$).

6. Laske ensin lukujen $\frac{1}{8}$ ja $\frac{3}{5}$ summa ja tulo, ja sitten saadun tulon kolmas potenssi. Viimeisimpään tulokseen voi viitata symbolilla $\%$ ja aiempiin muodossa $\%n$, missä n on tulosrivin numero, tai muodossa $\%th(n)$, missä $n = 1$ viittaa viimeisimpään tulokseen, $n = 2$ toiseksi viimeiseen, jne. (Engl. $n^{th} \rightarrow n:s$.)

Tällaiset viittaukset ovat sikäli vaarallisia, että ne viittaavat helposti väärin tallennetuissa dokumenteissa. Siksi niiden käyttöä harjoitustyössä ei suositella.

7. Avaa **Help**-valikosta **Maxima Help**. Valitse hakutavaksi **Index**. Kirjoita hakusana *numer*; lue dokumentaatio, ja laske piille $\%pi$ likiarvo.

Likiarvon voi laskea myös komennolla *float*

`float(lauseke)`

ja suurtarkkuuslikiarvon komennolla *bfloat* (`float`←floating point, `bfloat`←big float). Tarkkuus ilmaistaan muuttujalla *fpprec* (←floating point precision):

`bfloat(lauseke), fpprec:tarkkuus.`

Laske piin likiarvo 100 numeron tarkkuudella. Entä 1000 numeron?

8. Kätevämpi tapa käyttää aiempia tuloksia myöhemmissä laskuissa on nimetä tarvittavat suureet. Suure *lauseke* tallennetaan muuttuun *nimi* kaksoispistesijoituksella, `nimi:lauseke` (ks. **Help**→**Index**→**:**).

Anna luvuille $\frac{1}{8}$ ja $\frac{3}{5}$ nimet *luku1* ja *luku2*, laske näitä nimiä käyttäen lukujen summa ja tulo samalla nimeten tulokset nimille *summa* ja *tulo*. (Ääkkösiä nimeämisessä on syytä välttää.)

Laske tulon kolmas potenssi, ja edelleen lisää tähän aiemmin saatu summa. Laske lopuksi tuloksesta likiarvo.

9. **Tärkeä.** Lauseke, jonka arvoa edellä on laskettu, on tutummassa matemaattisessa muodossaan $(xy)^3 + x + y$. Jos muuttujiin x ja y ei haluta sitoa arvoja, voidaan näistä muuttujista riippuvan lausekkeen z arvo laskea pisteessä $x = a$ ja $y = b$ laskea komennolla `ev(z, x=a, y=b)`. (`ev`←evaluate, laske arvo). Vaihtoehtoisesti voi käyttää komentoa `subst([x=a, y=b], z)`.

Laske lausekkeen $(xy)^3 + x + y$ arvo komennon `ev` avulla, kun $x = 1/8$ ja $y = 3/5$.

10. **Käyttöliittymästä wxMaxima.** Siirry dokumentin alkuun, klikkaa osoitin aivan ensimmäisen syötesolun yläpuolelle (merkiksi pitäisi ilmestyä ohut ikkunan levyinen vaakaviiva).

Valitse **Cell→Insert Title Cell** ja anna dokumentillesi otsikko *Symbolinen laskenta, harjoitus 1*.

Klikkaa osoitin aivan otsikkosolun alapuolelle, ja valitse **Cell→Insert Section Cell**. Nämä väliotsikkosolut wxMaxima numeroi automaattisesti. Aloita jokainen tehtävä otsikolla ja kirjoita otsikkoon tehtävän numero, esimerkiksi ”Tehtävä 23”; älä välitä automaattisen numeroinnin tuottamasta numerosta.

Etsi dokumentista tämän harjoituksen eri tehtäviin liittyvät laskut ja liitä jokaisen kohdan alkuun väliotsikkosolu, jolloin dokumenttisi osat tulee numeroiduksi tehtäväjaon mukaisesti.

Tarpeen mukaan voit eri syötesolujen väliin lisätä kommentteja lisäämällä tekstisolun **Cell→Insert Text Cell**. Vaikka syötesolut ja tekstisolut eivät ulkoasultaan poikkea paljoa toisistaan, ei syötesoluja tule käyttää muuhun tarkoitukseen kuin siihen, mihin ne on tarkoitettu.

On tärkeää tallentaa tekosiaan ja varustaa ne omalla nimellä. Tallenna dokumentti wxMaxima wxm-muodossa vaikkapa nimellä *SL_harjoitus_1_sukunimi.wxm*. Sulje dokumentti (mahdollisesti wxMaximakin on hyvä lopettaa välillä), avaa se uudelleen. Aukeavasta dokumentista puuttuvat tulokset, vain syötteet ja otsikot säilyvät. Valitse **Cell→Evaluate All Cells**. Tarkista Maximan laskemista tuloksista, että dokumenttisi ”toimii oikein”.

Jos haluat tallentaa dokumenttiasi kopion, jossa mukana kulkevat myös tulokset, tallenna dokumentti wxMaximan wxmx-muodossa (**File→Save As**; alkuperäinen wxm-dokumentti kannattaa säilyttää). Tallennusmuotona wxm on parempi, koska ne ovat tavallisia tekstidokumentteja, joita voi lukea millä tahansa tekstieditorilla; wxmx-dokumentit ovat binäärisiä xml-tiedostoja, joiden avaamiseen käyvät vain tietyt ohjelmat (mm. wxMaxima).

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

11. Tutki ohjeesta, miten funktiota `plot2d` käytetään kuvaajan piirtämiseen. Piirrä kuva valitsemastasi funktiosta valitsemallasi välillä. Tee sitten sama uudestaan käyttäen komentoa `wxplot2d` muuttamatta mitään muuta. Miten eroa näiden komentojen tuloksilla on?
12. Yhtälö $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ on koulusta tuttua perusalgebraa. Myös Maxima osaa tämän kaavan, kunhan sitä käsketään oikein (vasemmalta oikealle *expand*, oikealta vasemmalle *factor*). Sievennyskomentoja löytyy valmiina wxMaximan valikosta **Simplify**. Huomaa valikkokomentojen toimintatapa: toiminta ”kohdistuu” valittuun kohtaan tai kohde on viimeksi laskettu syöte.
Jaa tekijöihin lauseke $x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x - 6$.
Miten pääset tulomuodosta takaisin polynomin tässä olevaan muotoon?
13. Sievennä $\sqrt{x^2 + 6x + 9}$. Onko tulos ”oikein”?
14. Selvitä lausekkeen

$$\frac{\sin x}{\sin(2x)} \times \frac{4 \sin^2 x - 1}{\sin(3x + \frac{\pi}{2})}$$

sieventämistä Maximan valikon **Simplify** kohdan **Trigonometric Simplification** eri komennoilla.

Kommentteja: Käyttöliittymäohjelman wxMaxima valikoista **Equations**, **Algebra**, **Calculus**, **Simplify** ja **Plot** (miksei myös **Numeric**) löytyy varsin paljon perustyöskentelyssä tarvittavia Maximan komentoja. Näiden komentojen tarkempi käyttötapaa on syytä selvittää Maximan käsikirjasta.

Edellä olleista tehtävistä näkyy, että Maximaa käytetään ainakin kahdella selkeästi toisistaan poikkeavalla tavalla. Jos kyse on **funktioityyppisestä komennosta**, sitä käytetään kuten komentoja `float` tai `logcontract`:

```
logcontract(lauseke);
```

Jos taas kyse on **systeemimuuttujasta**, kuten `logexpand` tai `numer`, tälle muuttujalle annetaan arvo, joka vaikuttaa uudelleenlaskettavan lausekkeen arvoon kuten `lauseke, logexpand=all`;

Jos muuttujan arvo jätetään ilmaisematta, niin oletusarvo on `true` kuten `lauseke, numer`;

Tässä käytössä oleva komentomuoto on itse asiassa lyhenne komennosta `ev(lauseke, numer=true)`;

Maximan käsikirjaa selatessa on siis hyvä kiinnittää huomiota siihen, onko kyse **komennosta** vai **muuttujasta** (tai vastaavasta).

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

15. Määrittele muuttujan **lauseke** arvoksi $e^x \sin x$.

Laske funktion ensimmäinen, toinen ja kolmas derivaatta ja anna myös näille nimet. Piirrä nämä samaan kuvaan (*wxplot2d*, ks. tehtävä 11).

16. Laske määräämätön integraali $\int e^{-ax} \sin x dx$ (*integrate*) ja määrätty integraali $\int_0^\infty e^{-ax} \sin x dx$ ($\infty = \text{inf}$). Jotta määrätty integraali suppenisi (=olisi olemassa äärellisenä), pitää luvun a olla positiivinen.

Maximalle voit antaa myös ennakko-oletuksia. Anna oletus komennolla **assume(a>0)**; ja laske yllä oleva integraali uudestaan. Oletukset voit poistaa komennolla **forget(facts());**.

17. Piirrä funktion $x \mapsto x^2 e^{2x} \left(\log\left(e^x + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{x^2 + 2e^{-x}} \right)$ kuvaaja välillä $15 \leq x \leq 20$. Mitä kuvan perusteella voisi päätellä seuraavasta raja-arvosta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{2x} \left(\log\left(e^x + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{x^2 + 2e^{-x}} \right) ?$$

Määrä kyseinen raja-arvo (*limit*).

18. **Kokoaminen.** Harjoitustyön – niin puolikkaan kuin kokonaisenkin – palauttamista varten sinun täytyy yhdistää eri harjoitukset yhdeksi wxm-tiedostoksi. (Helpottanee kuitenkin työskentelyä, ettet kokoa alusta asti yhtä valtavaa tiedostoa, vaan kokoat tarpeen tullen pienemmistä tiedostoista yhdistelmiä.) Kopioi kaikki harjoitukset yhteen uuteen wxm-tiedostoon ja nimeä tiedosto sopivasti. Sulje ja avaa tämä uusi tiedostosi, ja valitse valikosta **Cell→Evaluate All Cells**. Varmista, että kaikki on kuten pitääkin.

Tehtäväpakettien välille on syytä laittaa komento **kill(values)**; , joka poistaa antamasi lausekkeiden, funktioiden ja muiden vastaavien määritelmät. Näin eri tehtävien laskut eivät sekoita toisiaan. Anna Maximalle seuraavat komennot kokeillaksesi, kuinka hyvin se muistaa muuttujan **a** arvon:

```
a:1;  
a;  
kill(values);  
a;
```

Komentoi Maximan toimintaa.

Tällä viikolla harjoitustehtäviä on vähän, joten ehdit hyvin katsoa myös valinnaisia tehtäviä.

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

19. Maximassa yhtälöiden ja yhtälöryhmien ”perusratkaisija” on *solve*.

Ratkaise yhtälö $2x^5 + 7x^4 - 2x^3 - 25x^2 - 12x + 12 = 0$. Vaikka yhtälö on viidettä astetta, Maxima palauttaa vain neljä juurta. Polynomiyhtälöiden *juurten kertaluvut* Maxima kertoo komennolla (tai oikeammin systeemimuuttujalla) **multiplicities**. Tässä tilanteessa juuret saadaan melko helposti selville myös komennolla **factor**.

20. Viidennen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöt voivat olla ongelmaisia. Yritä ratkaista yhtälö $x^5 + 7x + 1 = 0$. Maximan komento **algsys** ratkaisee polynomiyhtälöryhmiä (huomaa syntaksi) tarvittaessa numeerisesti. Kokeile tätä. Muita hyödyllisiä komentoja polynomiyhtälöiden ratkaisemiseen ovat **nroots** ja **allroots**.

21. Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ y^2 = x^3 - 3x + 1. \end{cases}$$

22. Piirrä funktion $f(x) := e^x \sin(2x) + e^{x/2} \cos x$ ja sen derivaatan $f'(x)$ kuvaajat.

Etsi yhtälölle $f'(x) = 0$ ratkaisu likimääräismenetelmin. Selvitä aluksi, miten komentoa **find_root** käytetään. Miten avuksi tarvittavat luvut a ja b on valittava? Käytä derivaatan kuvaajaa apuna. Laske myös funktion arvo löytämässäsi derivaatan (likimääräisessä) nollakohdassa.

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximian Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommenttein, sekä tallentaa se riittävän usein.

Tehtävät liittyvät lineaarialgebraan/matriisilaskentaan. Peruskäsitteistö löytyy kerrattuna luennolla esitetystä materiaalista.

23. Olkoot

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad C := \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Määrää matriisien (*matrix*) A , B ja C kaikki ne parittaiset (matriisi-)tulot, jotka on määritelty.

Kertomerkillä on väliä: Tavallinen matriisitulo merkitään pisteellä (esim. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$), kun taas alkioittainen tulo merkitään tähdellä (esim. $\mathbf{A} * \mathbf{A}$). Tässä tehtävässä tarkoitus on tutkia vain tavallista matriisituloa.

24. (Jatkoa.) Määrää jokaiselle matriiseista A , B ja C aste (*rank*).

Määrää determinantti (*determinant*) ja käänteismatriisi (*invert*) niille matriiseista A , B ja C , joille ne on määritelty.

25. (Jatkoa.) Määrää matriisin A liittomatriisi A_{ad} (*adjoint*) ja totea, että $AA_{\text{ad}} = (\det A)\mathbb{I}$, missä $\mathbb{I}$ on 3×3 -kokoinen yksikkömatriisi (*ident*).

Tällä viikolla harjoitustehtäviä on vähän, joten ehdit hyvin katsoa myös valinnaisia tehtäviä.

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

Lataa (*load*) käyttöön grafiikkapaketti **draw**, jos tarvittavia komentoja ei muuten näytä löytyvän. Riippuu luultavasti versiosta, mitä tarvitsee ladata ja mitä ei.

26. Piirrä komentojen *wxdraw2d* ja *explicit* avulla funktion $f(x) := x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ kuvaaja. Myös komentoa *draw2d* saa käyttää jos se on mieltäisempi.
27. (Jatkoa.) Määrä funktion f nollakohdat, eli pisteet x , joissa käyrä $y = f(x)$ leikkaa x -akselin. Tässä komento **allroots** lienee kätevin. (Miksei **solve**?)
28. Yksittäisen kuvaajan voi piirtää helpoiten *wxplot2d*-komennolla. Useampien graafisten elementtien yhdistelyyn *wxdraw2d* on tarpeen. Komenna Maximaa näin:

```
wxdraw2d(  
  color=green,  
  explicit(x^2,x,-2,0),  
  color=red,  
  implicit(x^2+y^2=1,x,-1,1,y,-1,1)  
);
```

Samassa kuvassa on sekä eksplisiittinen (tavallinen) kuvaaja että implisiittinen kuvaaja (yhtälön ratkaisujoukko). Funktion $x \mapsto x^2$ kuvaaja on piirretty vain välillä $[-2, 0]$. Miten sinun pitää muuttaa komentoa saadaksesi paraabelin ulottumaan ympyrän oikealle puolelle?

Tällä viikolla harjoitustehtäviä on vähän, joten ehdit hyvin katsoa myös valinnaisia tehtäviä.

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

29. **Ääriarvo-ongelmaesimerkki.** Lue tämä esimerkki, toteuta se itse Maximalla ja vastaa lopussa esitettyyn kysymykseen.

Etsitään funktion $f(x) = \sin x + \log x$ ääriarvot välillä $[1, 10]$ Maximan avulla. Määritellään ensin funktion lauseke muuttujaksi **lauseke**:

```
lauseke:sin(x)+log(x);
```

Lasketaan sitten derivaatta:

```
dlauseke:diff(lauseke,x);
```

Ääriarvot löytyvät tunnetusti välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista.

Piirretään kuva funktiosta ja derivaatasta:

```
wxplot2d([lauseke,dlauseke],[x,1,10]);
```

Kuvasta nähdään, että yksi derivaatan nollakohta on jossain ykkösen ja kolmosen välillä. Etsitään tämä nollakohta ja annetaan sille nimi **a**:

```
a:find_root(dlauseke,x,1,3);
```

Toinen nollakohta on välillä (4, 5) ja kolmas välillä (7, 9):

```
b:find_root(dlauseke,x,4,5);
```

```
c:find_root(dlauseke,x,7,9);
```

(Nämä ovat kaksi eri komentoa. Voit antaa ne yhdessä tai erikseen.) Lisäksi ääriarvo voidaan saavuttaa välin päätepisteissä, joten laitetaan nekin talteen:

```
d:1;
```

```
e:10;
```

Lasketaan sitten lausekkeen arvot näissä pisteissä ja nimetään vastaavat muuttujat isoilla kirjaimilla:

```
A:ev(lauseke,x=a);
```

```
B:ev(lauseke,x=b);
```

```
C:ev(lauseke,x=c);
```

```
D:ev(lauseke,x=d);
```

```
E:ev(lauseke,x=e);
```

Vertailemalla näitä lukuja nähdään funktion suurin ja pienin arvo sekä pisteet, joissa ne saavutetaan.

Piirretään lopuksi vielä tyylikäs kuva, jossa näkyy funktio, sen derivaatta, derivaatan nollakohdat ja ääriarvokandidaatit:

```
wxdraw2d(
```

```
xrange=[0.9,10.1],
```

```
yrange=[-1,4],
```

```
xaxis=true,
```

```

color=blue,
explicit(lauseke,x,1,10),
color=red,
explicit(dlauseke,x,1,10),
color=green,
points_joined=true,
point_size=0,
points([[a,0],[a,A]]),
points([[b,0],[b,B]]),
points([[c,0],[c,C]]),
points([[d,0],[d,D]]),
points([[e,0],[e,E]]),
color=black,
points_joined=false,
point_type=plus,
point_size=2,
points([[a,A],[b,B],[c,C],[d,D],[e,E]])
);

```

(Tämä on yksi komento, joten se pitää syöttää kerralla! Rivinvaihdot voi jättää pois jos tahtoo.)

Millä muuttujan x arvolla funktio saa pienimmän arvonsa tällä välillä? Mikä on funktion suurin arvo tällä välillä? Anna vastaus likiarvoina tai Maxima-muuttujien niminä.

30. **Ääriarvo-ongelma.** Etsi funktion $f(x) = \cos x - \log x$ ääriarvot välillä $[1, 7]$ ja esitä laskusi graafisesti. Käytä hyväksesi edellistä tehtävää.
31. **Tulosten tulkintaa.** Laske integraalit $\int_0^\pi \tan(x)dx$ ja $\int_0^{2\pi} \tan(x)dx$. Piirrä myös tangenttifunktion kuvaaja välillä $[0, 2\pi]$. Kommentoi tuloksia.
32. **Pulmia.** Vastaa joka kohtaan. Käytä selittämiseen tekstisoluja.
 - (1) Miksi komento `wxplot2d(1-2x,[x,0,2]);` ei tuota kuvaajaa? Miten komentoa pitää korjata?
 - (2) Komennon `cos(arccos(x));` pitäisi palauttaa x . Tämä ei kuitenkaan toimi. Miksi ei?
 - (3) Käytä komentoa `trigexpand` sieventämään lauseketta $2 \sin 2z$. Mitä sinun pitää kirjoittaa Maximaan? Varmista että toimii.
 - (4) Mitä Maximan pitäisi antaa vastaukseksi, komennat `diff(x^2,x);`? Mitä tämä tarkoittaa?
 - (5) Kun edellisen komennon jälkeen komennat `ev(%,x=1);`, mitä Maximan pitäisi vastata? Selitä, minkä laskun tulos saatu luku on.

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

33. Miten sievenee lauseke

$$\frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}?$$

34. Maxima sieventää automaattisesti lausekkeen $\tan(\arctan x)$, mutta ei lauseketta $\arctan(\tan x)$. Piirrä kuva, niin näet miksi. (**wxplot2d**)

Selvitä ensin, millä nimellä arcustangentti tunnetaan Maximassa. Kyseisen funktion nimi ei nimittäin ole **arctan** vaan jotain muuta.

35. Logaritmin laskusääntöjä muistelemalla lauseke

$$\frac{(\log(x^2 + 6x + 9) - \log(x + 3))^p}{(\log(x + 3))^{\frac{p}{2}}}$$

sievenee helposti muotoon $(\log(x+3))^{p/2}$. Maxima ei kuitenkaan tunnu osaavan tätä automaattisesti.

Nimeä tämä lauseke. Huomaat, että Maxima ei automaattisesti sievennä sitä. Sieventämiseen tarvitaan erityinen komento. Kokeile juurilausekkeiden (engl. "radicals") ja logaritmien sieventämiseen tarkoitettuja komentoja. Tutki Maximan valikkoa. Mitkä toimivat, mitkä eivät?

36. **Logaritmilausekkeiden sieventämisestä.** Systeemimuuttujan **logexpand** arvoina voi olla **false**, **true**, **all** tai **super**. Selvitä Maximan käsikirjan (**Help**) avulla miten muuttujan **logexpand** arvo vaikuttaa logaritmien sieventämiseen; sen käyttötapana on

lauseke, logexpand=arvo;

Syötä Maximalle lauseke $\log((x+3)^2)$ ja nimeä se vaikka nimelle **y**. Sievennä lauseke **y** käyttäen näitä eri **logexpand**-vaihtoehtoja, ja nimeä jokainen tulos uuteen muuttujaan.

Toista sama lausekkeille $z = \log(4(x+3)^2)$ ja $w = \log(a(x+3)^n)$ (missä parametreilla **a** ja **n** ei ole numeerista arvoa). Vertaa **y:n** ja **z:n** käytöstä.

Polynomeille **expand** ja **factor** ovat jossakin mielessä käänteisiä operaatioita. Muuttujan **logexpand** eri arvojen vaikutus voidaan "kääntää" komennolla **logcontract**. Huomaa, että **logcontract** on funktio, ei muuttuja. Miten **logcontract** vaikuttaa edellisiin täysin avattuihin (**logexpand=super**) tuloksiin? Viittaa tuloksiin muuttujien nimillä. Sitä varten tulokset nimettiin.

37. **Lauseke ja funktio.** Funktio f ja funktion lauseke $f(x)$ ovat kaksi eri asiaa, niin matematiikassa kuin Maximassakin. Tällä kurssilla käytetään enimmäkseen lausekkeita, koska se on usein helpompaa. Määrittele funktio $f(x) = x^2$ sekä lausekkeena (`lauseke:x^2`) että funktiona (`f(x):=x^2`).

Mitä Maxima antaa, kun kysyt mitä on `f(y)`? Miten saat vastaavan tuloksen käyttäen lauseketta `lauseke` funktion `f` sijaan?

Mikä on funktion f arvo pisteessä 2? Laske molemmilla tavoilla.

38. Toista tehtävä 29 käyttäen lausekkeen sijaan funktiota `f(x):=sin(x)+log(x)`.

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

Useita Maxima-komentoja voi antaa kerralla yhdelle syöteriville kaarisulkujen³ avulla ja erottamalla eri komennot toisistaan pilkulla:

```
(nimi1:lauseke1, nimi2:lauseke2,...);
```

Muuttujat, joita ei enää tarvita, on hyvä vapauttaa Maximan muistista. Vapauttaminen tapahtuu komennolla `kill`. Lista muuttujista, joille on annettu arvo, saadaan komennolla `values`, ja kaikkien tämän listan muuttujien arvot voidaan vapauttaa `kill(values)`.

39. **Anonyymi ja nimetty funktio.** Jotkin funktiot (ks. esim. *apply*) vaativat argumenttikseen funktion, ja silloin ei lauseke auta. Tällöin voi nimetä funktion (esim. $f(x) := x^2$ kuten edellä), mutta joskus ei haluaisi turhaan nimetä objektia. Tällöin voi käyttää anonyymia funktiota, jollaisen luomiseen käytetään funktiota `lambda`.

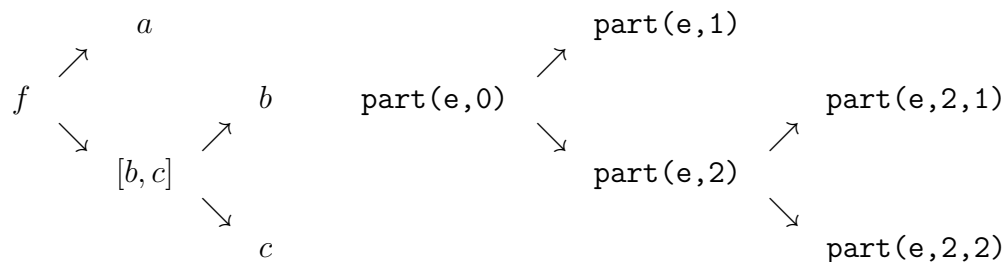
Laske funktion $t \mapsto t^3 - t$ arvo pisteessä 4 käyttäen anonyymia funktiota (nimeämättä siis lauseketta tai funktiota).

40. (Jatkoa.) Määrittele apina näin: `apina:banaani^3`. Miten tätä objektia sekä `lambda`-funktiota käyttäen voidaan määritellä funktio g , jolle $g(t) = t^3$? Älä siis kirjoita `g(t):=t^3`, vaan käytä valmista lauseketta `lambda`dan avulla. (Vihje: Kannattaa kokeilla apinan evaluointia `lambda`dan sisällä.)

41. **Maximan olioiden puurakenteesta.** Kun Maximalle asetetaan

```
(%i1) e:f(a,[b,c]);
```

käsittelee Maxima lauseketta alla olevan kaavion vasemman puoleisen ”puurakenteen” mukaisesti (tässä oletetaan, että k.o. muuttujia ei ole mitenkään määritelty):



³Maximaa (ja montaa muutakin ohjelmaa) käytettäessä on eri sulkuja hyvä oppia kutsu-
maan niiden oikeilla nimillä: (*kaarisulut*), [*hakasulut*] ja { *aaltosulut* }.

Käyttöliittymäohjelma wxMaximassa voi useita komentoja laittaa samaan syötesoluun
(Input Cell), mutta wxMaxima välittää ne laskentaydin Maximalle erillisinä syöteinä (eri
%in- ja %out-nimikkeet). Kaarisuluilla ryhmitettynä ja pilkuin erotettuna syöte on Maxi-
malla vain yksi syöte.

Suure f on lausekkeen e *juuri*. Se saadaan poimituksi komenolla `part(e,0)`. Lausekkeesta e lähtee *haarat solmuihin* a ja $[b,c]$. Näistä puolestaan $[b,c]$ haarautuu uudestaan haaroiksi solmuihin b ja c . Lausekkeen $[b,c]$ juuri on listojen rakentamisen perustyökalu `.`. Kuvan oikea puoli selittää, miten lausekkeen e eri osat saadaan poimituksi erilleen.

Komennolla `substpart(g,e,j)` voidaan lausekkeen e paikassa j oleva osa korvata lausekkeella g . (Kyseinen osa saadaan poimituksi komennolla `part(e,j)`.) Esimerkiksi `part(e,2,2)` poimii lausekkeesta e osan c , ja sen tilalle voidaan vaihtaa $x^2 + y^2$ komennolla

```
(%i2) substpart(x^2+y^2,e,2,2);
```

```
(%o2) f(a, [b, y^2 + x^2])
```

Jos halutaan muuttaa useampia solmuja kerralla, voidaan käyttää komentoa `map`. Se lisää lausekkeen e jokaisen ensimmäisellä tasolla olevan solmun juureksi annetun funktion. Esimerkiksi

```
(%i3) map(g,e);
```

```
(%o3) f(g(a), g([b, c]))
```

Edellä esiintynyt `map("=",...)` toimii näin:

```
(%i4) map("=", [x,y,z], [1,2,3]);
```

```
(%o4) [x = 1, y = 2, z = 3]
```

42. Halutaan laskea summa $\sum_{j=1}^{10} a_j$, missä a_j :t ovat lukuja. Tämä voidaan tehdä käyttäen komentoa `sum`:

```
sum(a[j],j,1,10);
```

Toinen tapa laskea summa on käyttää `for`-silmukkaa: Alustetaan ensin summalle s arvo nolla:

```
s:0;
```

Haluttu summa voidaan nyt laskea komennolla

```
for j:1 thru 10 do ( s:s+a[j] );
```

Tässä siis ensin alustetaan lausekkeelle j arvo 1 ja annetaan sen käydä läpi kokonaislukuarvot 10:een asti ja jokaisen arvon kohdalla suoritetaan komento `s:s+a[j]`. Lopuksi täytyy vielä kysyä Maximalta muuttujan s arvo.

Syötä seuraava lista (lämpötilan kuukausikeskiarvoja)

```
lst:[ [1,-8.3], [2,-8.5], [3,-3.8], [4,2.2], [5,8.9], [6,13.7],
      [7,16.5], [8,14.1], [9,8.8], [10,3.6], [11,-2.0], [12,-6.2] ];
```

Käyttäen molempia edellä mainituista tavoista laske lämpötilan vuosikeskiarvo. Käytä komentoa `part` apuna lämpötilan erottamiseksi.

Tuliko eri tavoilla sama tulos? Kumpi tapa tuntuu luontevammalta?

43. Tutustutaan seuraavaksi `if...then`-rakenteen käyttöön. Oletetaan, että a on jokin reaaliuku. Komento

```
if a > 0 then print("a on positiivinen");
```

tulostaa tekstin ”a on positiivinen”, jos lausekkeelle a pätee $a > 0$.

Käyttäen edellä olevaa esimerkkiä apuna tulosta (komento `print`) edellisen tehtävän listasta esiin ne kuukausi-lämpötila-parit, joissa lämpötilan kuukausikeskiarvo on suurempi kuin vuosikeskiarvo.

44. Jatketaan edellistä tehtävää, mutta tällä kertaa tulostamisen sijaan halutaan tallentaa ehdot täyttävät listan alkiot toiseen listaan. Alustetaan ensin tyhjä lista

```
tmp: [];
```

Tutustu Maximian komenttoon `append` (Huomaa erityisesti, että `append` liittää kaksi listaa yhteen, ei lisää alkioita listaan, kuten monissa ohjelmointikielissä). Käyttäen sitä, tällä kertaa tulostamisen sijaan, lisää ehdot täyttävä pari määrittelemääsi listaan `tmp`.

45. Edellisen tehtävän karsittu lista voidaan muodostaa myös toisella tapaa. Määritellään funktio

```
f(l):=is(l[2] > s/12);
```

missä s on siis tehtävässä 42 määritelty. Laske funktion f arvo listan `lst` ensimmäisestä ja seitsemännestä parista.

Nyt käyttäen `sublist`-komentoa saadaan sama lopputulos kuin edeltävässä tehtävässä:

```
sublist(lst, f);
```

Huomaa, että tässä jälkimmäinen muuttuja on funktio, ei funktiota määrittelevä lauseke.

Tässä tilanteessa voidaan käyttää myös funktion `lambda`-esitystä⁴, jolloin ei tarvitse erikseen nimetä funktiota f . Miten se tapahtuisi?

46. Vapauta funktio f . Komentoja `map` ja `apply` voi käyttää ”Maximamaisemmin” alussa esitettyyn listan `lst` lämpötilakeskiarvon laskemiseen. Kokeile aluksi seuraavia (yksi kerrallaan):

```
map(f, [a,b,c]);
```

```
apply(f, [a,b,c]);
```

Maximassa on myös kummallinen funktio nimeltä `+`, jolle voi antaa niin monta argumenttia kuin tahtoo. (Voit halutessasi tutkia myös funktioita `*`, `=` ja `-`.) Laske esimerkiksi seuraavat:

```
+"(a,b);
```

```
+"(12,43,71);
```

Listan `[a,b,c]` summan voi siis laskea seuraavasti: `apply("+", [a,b,c]);`.

Määrittele funktio, joka laskee sille annetun listan summan, ja sitä käyttäen laske lämpötilojen summa listasta `lst`. Huomaa, että tehtävässä joudut erottamaan lämpötilat listasta `lst`. Tässä erottelussa auttaa sopiva funktio f yhdessä `map`-komennon kanssa.

⁴Funktion `lambda`-esitys vastaa tavanomaista matemaattista ilmaisua, jossa funktiolle ei anneta nimeä; esimerkiksi ”funktio $x \mapsto x^2 \sin(x+2)$ ”. Katso tehtävää 39.

47. Käyttäen hyväksi edellistä tehtävää ja Maximan komentoa `length` määrittele funktio `avg`, joka laskee sille annetun (yksiulotteisen) listan keskiarvon. Miten käyttäen tätä määrittelemääsi funktiota lasket listasta `lst` lämpötilojen keskiarvon?

48. Listan `L` alkioiden keskihajonta saadaan lasketuksi komennolla

```
std_dev(L):=sqrt((L-avg(L)).(L-avg(L))/length(L));
```

Laske listan `lst` lämpötilojen keskihajonta ja piirrä `draw`-kirjaston komentojen avulla kuva, jossa on lämpötilakäyrä ja vaakaviivana lämpötilan keskiarvo. Lisää kuvaan vaakaviivoina lämpötilan keskiarvo + keskihajonta ja keskiarvo – keskihajonta.

49. Maxima osaa lukea myös tiedostosta dataa. Komento

```
w1:read_matrix(file_search ("wind.data"))$
```

lukee tuulennopeuksien mittaustaulukon (`wind.data` on Maximan mukana tuleva tiedosto; ”On the other hand, file `wind.data` contains daily average wind speeds at 5 meteorological stations in the Republic of Ireland...”). Muuttuja `w1` on 100×5 -kokoinen matriisi, jonka jokainen sarake sisältää 100 tuulennopeusmittausta. Komento

```
w2:substpart("[", transpose(w1), 0)$
```

muuttaa mittaustulokset (helpommin käsiteltäväksi) viiden listan listaksi; kukin viidestä listasta on yhden mittauspaikan tuulennopeusarvojen lista.

Valitse jokin mittauspaikka, ja laske sen tuulennopeuksien keskiarvo ja keskihajonta. Poimi havainnoista ne, joissa tuulennopeus on ollut suurempi kuin keskiarvo + keskihajonta. Havainnollista laskuja kuvalla.

50. Maxima osaa lukea myös funktion määrittelyn tiedostosta. Näin ei joka kerta tarvitse kirjoittaa montaa komentoa tehdäkseen usein toistuvan asian, vaan voi luoda funktion, jonka lataa tiedostosta.

Avaa tavallinen tekstieditori ja tallenna seuraavat käskyt sisältävä tiedosto nimellä ”`crit_points_p.mac`”:

```
crit_points_p():=(
p:readonly("Anna polynomi p(x):"),
dp:diff(p,x),
p_roots:map(lambda([z],part(z,2)),sort(realroots(dp))),
if length(p_roots) = 0 then error("Virhe: derivaatalla ei reaalisia juuria"),
p_values:map(lambda([y],ev(p,x=y)),p_roots),
min_root:first(p_roots),
max_root:last(p_roots),
min_value: first(sort(p_values)),
max_value: last(sort(p_values)),
wxdraw2d(
  xrange=[min_root-1,max_root+1],
  xaxis=true,
  yrange=[min_value-1,max_value+1],
  color=blue,
  explicit(p,x,min_root-1,max_root+1),
```

```
    color=black,  
    points_joined=false,  
    point_type=circle,  
    point_size=1,  
    points(p_roots,p_values)  
  )  
)$
```

Tiedostossa siis määritellään funktio `crit_points_p`. Voit ladata sen käyttöösi valitsemalla Maximan valikoista `File -> Batch file...` ja avaamalla juuri luomasi tiedoston.

Kokeile ajaa kyseinen funktio komennolla

```
crit_points_p();
```

Tutki funktion koodia ja selitä miten se toimii ja mitä se tekee. Sinun ei tarvitse erikseen palauttaa luomaasi tiedostoa.

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

51. Maxima osaa käsitellä kompleksilukuja, t.s. lukuja, jotka ovat muotoa $a + bi$, missä a ja b ovat reaalilukuja ja i on ns. imaginaariyksikkö, joka toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$. Maximalle $i = \%i$. Katso käsikirjan kohtia *Data Types and Structures* $\rightarrow$ *Numbers* $\rightarrow$ *Complex numbers* ja *Mathematical functions* $\rightarrow$ *Functions for complex numbers*. (Maximan versio 5.30).

Kompleksiluvun normaali esitys $a + bi$ on nimeltään karteeminen esitys (*rectform*). Luvut a ja b ovat sen reaaliosa (*realpart*) ja imaginaariosa (*imagpart*). Luku $a - bi$ on luvun $a + bi$ kompleksikonjugaatti (*conjugate*).

Esitä luvut $(2 + 3i)^2$ ja $\frac{1}{2+3i}$ normaalissa karteesisessä muodossaan.

52. Kompleksiluku z voidaan myös esittää ns. napakoordinaattimuodossa (*polarform*), $z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi =: re^{i\varphi}$. Luku r , pisteen z etäisyys origosta, on nimeltään luvun z moduli (engl. complex absolute value, *cabs*; myös itseisarvo) ja φ argumentti, φ positiivisen x -akselin ja radiussäteen välinen kulma, (engl. complex argument, *carg*; myös vaihekulma; $-\pi < \varphi \leq \pi$).

Esitä luvut $2 + 3i$ ja $\frac{1}{2+3i}$ napakoordinaattimuodossa.

53. Maxima tuntee useimmille funktioille arvot myös kompleksiselle muuttujan arvolle. Määrittää karteeminen esitys kompleksiluvuille $\cos(4 + 5i)$ ja $\arccos i$. Määrittää myös lukujen modulit.

54. Tehtävän 23 matriisia C vastaavan lineaarikuvauksen *ydin* on joukko $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid Cv = 0\}$. Tällaista joukkoa Maximalla ei voi määrätä, mutta kantavektorit kyllä; apuna komento **nullspace**. Vastaavasti *kuvajoukolle* $\{Cv \in \mathbb{R}^3 \mid v \in \mathbb{R}^3\}$ löydetään kantavektorit komennolla **columnspace**.

Määrittää C :n ytimelle ja kuvajoukolle kantavektorit.

55. Maximalle vektoreita on kolmea eri tyyppiä: listoja, rivimatriiseita (eli vaakavektoreita) ja sarakematriiseita (eli pystyvektoreita). Tässä tehtävässä opetellaan muuttamaan vektori esitystavasta toiseen?

Rivi- ja sarakematriisien välinen muutos on helppo: matriisin transponointi (*transpose*). Listana esitetyn vektorin muuttaminen rivimatriisiksi (vaakavektoriksi) on helppoa: rivimatriisihan määritellään ilmaisemalla rivi listana. Sarakematriisin (pystyvektorin) muuttaminen listaksi käy kahdella askeleella: ensin muutos rivimatriisiksi, sitten komento **first** (**=part(...,1)**) poimii k.o. matriisin ensimmäisen rivin.

Määrittele $a = (1, 2)$ pystyvektorina, $b = (3, 4)$ vaakavektorina ja $c = (5, 6)$ listana. Muuta a vaakavektoriksi ja listaksi. Muuta b pystyvektoriksi ja listaksi. Muuta c pysty- ja vaakavektoriksi.

56. Tehtävän 23 matriisia C vastaavan lineaarikuvauksen ydin on siis homogeenisen yhtälöryhmän $Cv = 0$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ratkaisujen joukko.

Tällainen olio (Cv on sarakematriisi) ei kuitenkaan kelpaa Maximan `solve`-komennolle, vaan se pitää ensin muuttaa listaksi `cv` (ks. ed. teht.).

Ennen yhtälön ratkaisemista vektori yhtälö $Cv = (0, 0)$ pitää muuttaa yhtälöryhmäksi; apuun käy komento `map("=", cv, [0,0])`. Ratkaise saatu yhtälöryhmä ja vertaa tulosta aiemmin löydettyyn kantavektoriin.

57. Määrää matriisia

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

vastaavan lineaarikuvauksen ytimelle kanta. Kyseisten kantavektoreiden joukon Maxima ”kehystää” komennolla `span`. Miten kantavektorit poimitaan tämän kehysten alta? Komennolla `part(e, j)` saadaan lausekeesta `e` poimituksi sen j . osa. Komennon `nullspace` tuloksesta saatava vektori on sarakematriisi, mutta komennolle `orthogonal_complement` sen pitää sellainen olla. Määrää A :n ytimen ortogonaalikomplementti.

Tehtävä 41 valottaa Maximan lausekkeiden puurakennetta lisää.

58. (Jatkoa.) Määrää vastaavalla tavalla A kuvajoukolle (*columnspace*) ortogonaalikomplementti.
59. Matriisiin voi laittaa sisään reaali- ja kompleksilukuja. Tämä voi olla tuttua kvanttimekaniikasta. Määrittele matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Matriisia A sanotaan symmetriseksi, jos sen transpoosi A^T on matriisi itse. Onko A symmetrinen?

Matriisia A sanotaan hermiittiseksi, jos sen konjugaattitranspoosi (voidaan merkitä monin tavoin, esim. A^* tai $A^\dagger$) on matriisi itse. Vähennä matriisista A sen konjugaattitranspoosi (*conjugate* ja *transpose* jossain järjestyksessä) ja tutki saatko nollan. Onko A hermiittinen?

60. (Jatkoa.) Reaalisen symmetrisen matriisin ominaisarvot ovat reaaliset. Sama pätee hermiittisille kompleksimatriiseille. Laske edellisen tehtävän matriisin A ominaisarvot.
61. (Jatkoa.) Reaalisen symmetrisen matriisin ominaisvektorit ovat kohtisuorassa. Laske kompleksimatriisimme ominaisvektorit (*eigenvectors*) ja niiden sisätulo (*innerproduct*). Mitä saat sisätuloksi? Mitä Maximan dokumentaatio kertoo sisätulon laskemisesta? Siihen liittyy jotain erikoista kun käytetään kompleksilukuja.

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siinä pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

62. Laske funktion $f(x) = \sin(x \log(2x))$ derivaatta.
63. Useammasta kuin yhdestä muuttujasta riippuvan funktion derivaattoja kutsutaan *osittaisderivaatoiksi* ja niitä merkitään ”koukero-d”:llä, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ jne. Vastaavasti toisen kertaluvun osittaisderivaattoja merkitään $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (derivoidaan kaksi kertaa x :n suhteen), $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (derivoidaan kerran x :n ja kerran y :n suhteen), jne. Maximan `diff` laskee juuri näitä osittaisderivaattoja.
- Laske funktion $f(x, y) := \log(x^2 + y^2)$ toisen kertaluvun osittaisderivaatat $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Laske myös $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ja osoita, että kyseinen lauseke on nolla.
64. Laske muuttujista x ja t riippuvan funktion⁵ $f(x, t) := t^{-1/2} e^{-x^2/(4t)}$ osittaisderivaatat ja totea, että $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Muista: Tietokoneella kaksi lauseketta on useimmiten helpointa todeta samoiksi tutkimalla lausekkeiden erotusta.
65. Tee seuraavat määritykset (kumpikin omana syötteenään; V = ”vektori”)⁶:
- ```
laplacian(f,V):=sum(diff(f, V[j], 2), j,1,length(V));
heat(f,t,V):=diff(f,t) - laplacian(f,V);
```

Tehtävän 63  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  voidaan laskea nyt helpommin: `laplacian(f,[x,y])`. Kokeile. Vastaavasti tehtävän 64 lasku käy komennolla `heat(f,t,[x])`.

Laske sievennettynä

- (1) tehtävän 63 derivaatta, kun  $f(x, y) := \arctan(y/x)$ ;
- (2) tehtävää 63 vastaava derivaatta  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ , kun

$$f(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- (3) tehtävää 64 vastaava derivaatta  $\frac{\partial f}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$ , kun

$$f(x, y, t) := t^{-1} e^{-(x^2+y^2)/(4t)}$$

<sup>5</sup>Tämän funktion avulla voi löytää lämpöyhtälön *kaikki* ratkaisut. Lisätietoja saa osittaisdifferentiaaliyhtälöiden kurssilta tai kysymällä laitoksen väeltä.

<sup>6</sup>Nimi `laplacian` tulee siitä, että kyseistä differentiaalioperaattoria on tapana kutsua *Laplace-operaattoriksi* ja merkitä  $\Delta$ . Siis  $\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ . Vastaavasti  $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial t} - \Delta f$  on *lämpöoperaattori*  $\rightarrow$  `heat`.

66. **Differentiaaliyhtälö.** Maxima osaa ratkaista myös joitain differentiaaliyhtälöitä. Tavallinen differentiaaliyhtälö tunnetaan englanniksi lyhenteellä ODE (ordinary differential equation). Etsi sopiva Maxima-funktio ja ratkaise differentiaaliyhtälö  $\frac{d}{dx}y = y$  eli  $y' = y$ .

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

67. Kaikilla (yksinkertaisillakaan) funktioilla ei ole alkeisfunktioiden avulla esitettävää integraalifunktiota. Kokeile vaikka miten käy integraalille  $\int e^{-x^2} \cos x dx$ .

68. Laske funktiolle  $f(x, y) := (x - y)/(x + y)^3$  molemmat integraalit

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \quad \text{ja} \quad \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

Mitä huomaat<sup>7</sup>?

69. Määrää integraaleille  $\int_0^\infty e^{-x} \sin x dx$  ja  $\int_0^{10} e^{-x} \sin x dx$  tarkka arvo ja jälkimmäiselle myös likiarvo. Laske myös  $\int_0^{10} e^{-x} \sin x dx$  Rombergin menetelmällä.

70. Laske moniulotteinen integraali

$$\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 yze^x dx dy dz = \int_0^1 \left( \int_{-1}^0 \left( \int_{-1}^1 yze^x dx \right) dy \right) dz.$$

Huomaa tässä muuttujien järjestys ”sisältä ulospäin” (t.s. muuttujaa  $x$  vastaa väli  $-1 \leq x \leq 1$ , jne).

71. Kuten tehtävässä 67 nähtiin, ei kaikilla funktioilla ole alkeisfunktioiden avulla esitettävää integraalifunktiota. Maxima osaa kuitenkin laskea integraalille  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos x dx$  tarkan arvon, kuten myös integraalille  $\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} \cos x dx$ , kun  $a > 0$ . Laske nämä.

72. Laske funktion  $f(x) = \sin(x)/(1 + x^2)$  integraalifunktion derivaatta Maximalla. Mikä tulokseksi pitäisi tulla? Mitä Maxima antaa integraalifunktion lausekkeeksi?

73. Valitse jokin integroitava funktio. Älä kuitenkaan valitse edellisen tehtävän funktiota. (Esimerkki:  $f(x) = e^{-4x^2} \sin^2 x$ .) Laske valitsemallasi funktiolla (tai lausekkeella)  $f$  integraali  $\int_0^t f(x) dx$  sekä tuloksen raja-arvo kun  $t \rightarrow \infty$ . Miten tulos eroaa integraalista  $\int_0^\infty f(x) dx$  ja miksi?

74. Piirrä kuva funktiosta  $f(x) = x \sin(x)$ , sen derivaatafunktiosta sekä sen (jostain) integraalifunktiosta. Piirrä kaikki samaan kuvaan.

---

<sup>7</sup>Muistele tai selvitä, mitä Fubinin lause sanoo.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

75. Tutkitaan funktiota  $f(x) := x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ . Valitse jokin funktion  $f$  nollakohta  $x_0$  (komento **part tms**, älä leikkaa-liimaa). Piirrä samaan kuvaan funktion  $f$  kuvaaja ja piste  $(x_0, f(x_0)) = (x_0, 0)$  (tämä onnistuu graafisen objektin **points** avulla; komennon **points** syntaksikuvaus on syytä lukea tarkkaan, sillä komentoa **points** voi käyttää varsin monessa eri muodossa).

Lataa (*load*) käyttöön grafiikkapaketti **draw** ja Newton-paketti **mnewton**, jos tarvittavia komentoja ei muuten näytä löytyvän.

76. (Jatkoa.) Määrää lauseke funktion  $f$  kuvaajan pisteeseen  $x_0$  piirretylle tangenttisuoralle. (Muista, että tangenttisuoran yhtälö on  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .)

[Vihje: Kuten useimmiten, kannattaa edetä pienin askelin.]

77. (Jatkoa.) Piirrä samaan kuvaan

- (1) funktion  $f$  kuvaaja;
- (2) piste  $(x_0, f(x_0))$ ;
- (3) sen pisteeseen  $x_0$  piirretty tangenttisuora.

Korjaa kuvaa niin, että

- (1) piste  $(x_0, f(x_0))$  on piirretty selkeästi erottuvana (*point\_size*, *point\_type*, *color*), ja
- (2) pisteeseen  $x_0$  piirretty tangenttisuora, piste  $(x_0, f(x_0))$  ja itse kuvaaja  $y = f(x)$  on piirretty kukin omalla värillään.

78. (Jatkoa tehtävään 22.) Yhtälöiden likimääräisten ratkaisujen määrittämiseen käytetään usein myös *Newtonin menetelmää*, joka löytyy Maximasta useilla nimillä ja erilaisina versioina. Suositeltavaa on opetella yksi komento ja sen käyttötapu; useamman muuttujan funktioita osaa käsitellä **mnewton**, joka soveltuu toki samalla myös yhden muuttujan funktioille. Mitä komentoa käyttääkin, se pitää ensin ladata käyttöön komennolla **load**. Yllä mainittu löytyy paketista **mnewton**.

(Vain yhden muuttujan funktiolle soveltuva komento **newton** löytyy paketeista **newton1** tai **newton** – huomaa erilainen syntaksi!)

Määrää yhtälölle  $f'(x) = 0$  ratkaisu Newtonin menetelmällä (funktion  $f$  lauseke on sama kuin tehtävässä 22).

79. Yhtälöparin

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 3 \\ y^2 = x^3 - 3x + 2 \end{cases}$$

ratkaisemista voi auttaa piirtämällä kuvan. Kumpainenkin yhtälöparin määrittämistä käyristä voidaan piirtää *implicit*-tyyppisenä oliona. Tarkastele aluksi vaikka aluetta  $-3 \leq x \leq 4$ ,  $-4 \leq y \leq 4$ .

80. (Jatkoa.) Lataa käyttöön paketti `mnewton` (kuten teit tehtävässä 78) ja etsi sen avulla edellisen tehtävän yhtälöparille ainakin kaksi likimääräistä ratkaisua.

81. (Jatkoa.) Entä jos yhtälöparina on

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ y^2 = x^3 - 3x + 1 \end{cases}$$

Käyrät näyttävän nyt leikkaavan vain kahdessa pisteessä (piirrä kuva), mutta yhtälöparilla pitäisi olla kuusi ratkaisua kuten edellisessä tehtävässä. Miten löydät kompleksisia ratkaisuja Newtonin menetelmällä?

82. Piirrä draw-kirjaston komentojen (*implicit*) avulla yhtälöparin

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x + 1 \\ x^2 = y^3 - 3y + 1 \end{cases}$$

määräämät käyrät samaan kuvaan. (Sopiva  $xy$ -tason alue on  $-3 \leq x \leq 3$ ,  $-3 \leq y \leq 3$ ; kuvan avulla on tarkoitus etsiä käyrien leikkauspisteet.)

Kuten plot-komentojen kohdalla wxMaximassa draw-piirtokomennoista voi käyttää myös wx-alkuisia versioita, jotka tuottavat kuvan dokumentti-ikkunaan (käsikirja dokumentoi vain ilman wx-alkua olevat komennot).

83. (Jatkoa.) Määrää edelliselle yhtälöparille jokin ratkaisu (eli yksi käyrien leikkauspisteistä) paketin `mnewton` komennolla `mnewton`. Valitse alkuarvaus `GuessList` edellisen tehtävän kuvan avulla. Tarvittaessa piirrä sopiva ”osasuurennos”.
84. (Jatkoa.) Lisää tehtävässä 82 piirtämäsi kuvaan edellisessä tehtävässä löytämäsi käyrien leikkauspiste. Poimi aluksi komennon `mnewton` antamasta tuloksesta pisteen  $x$ - ja  $y$ -koordinaatit (*subst, ev, part, ...*). Jotta piste erottuisi selkeästi, aseta pisteen kooksi (*point\_size*) kaksi ja pisteen muodoksi (*point\_type*) `filled_circle`. Aseta kummallekin käyrälle ja leikkauspisteelle kullekin oma väri. Lisää kuvaan myös Newtonin menetelmälle antamasi alkuarvo. (Hakusana *color* tuo väärän kohdan käsikirjasta; kannattaa selata sisällön (*Contents*) mukaan, hakea *draw*, sen alta kohta *Graphics options* ja edelleen *color*.)
85. (Jatkoa.) Tee edellisen kahden tehtävän toiminnot käyttäen Newtonin menetelmälle alkuarvoja  $(-1.9, -1.1)$ ,  $(-2, -1.3)$ ,  $(-2.2, -1.5)$  ja  $(-2.3, -1.5)$ , t.s. piirrä käyrät, alkuarvopisteet ja Newtonin menetelmän antamat pisteet samaan kuvaan.

86. Yhtälön

$$2x^4 + y^4 - 3x^2y - 2y^3 + y^2 = 0$$

määräämä tasa-arvokäyrä (*implicit*) on hankala piirrettävä (tai paremminkin: kuva näyttää vialliselta; kokeile). Sijoita (*subst*) yhtälön vasemman puolen lausekkeeseen napakoordinaatit  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ , ja sievennä lauseketta. Ratkaise saadusta yhtälöstä  $\dots = 0$  muuttuja  $r$ . Valitse sopiva  $r$  ja piirrä **polar**-tyyppinen käyrä. Parempi?

87. Tehtävästä 77 mielenkiintoisempi versio olisi: etsi funktion  $f$  derivaatan nollakohdat ja piirrä samaan kuvaan funktion kuvaaja ja löydetyt derivaatan nollakohdat (ääriarvokandidaatit).

88. **Hupia.** Piirrää `wxdraw2d`-komentoa käyttäen tikku-ukko, kukka tai jokin muu haluamasi kuva. Käytä sekä pisteitä, eksplisiittisiä funktioita että implisiittisiä funktioita. Käytä myös useampaa väriä.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

Nämä tehtävät on laadittu kurssin alkamisen jälkeen, joten ne eivät ole sopivissa paketeissa vaan täällä perässä sekalaisessa läjässä.

89. **Ympyrät.** Suorita seuraava piirtokomento:

```
wxdraw2d(
 color=blue,
 implicit(x^2+y^2-1,x,-2,2,y,-2,2),
 color=red,
 explicit(sqrt(2^2-x^2),x,-2,2),
 explicit(-sqrt(2^2-x^2),x,-2,2),
 color=green,
 parametric(3*sin(t),3*cos(t),t,0,7),
 color=black,
 polar(4,theta,0,2*%pi),
 color=yellow,
 point_type=circle,
 points([[0,0]]),
 proportional_axes=xy
)$
```

Tuloksena on erivärisiä sisäkkäisiä ympyröitä. Selitä, miten kukin ympyrä on piirretty. Esimerkkiselitys mustasta ympyrästä:

Musta ympyrä piirretään polar-komennolla. Se on polaari- eli napakoordinaattikuvaaja, jossa säde on esitetty kulman funktiona. Kulma "theta" muuttuu nolasta kahteen piihin, ja säde on 4 kaikilla kulmilla. Kyseessä on siis vakiofunktio, joten muuttuja theta ei ollenkaan näy lausekkeessa "4".

Voit käyttää tätä selitystä mustaan, mutta selitä itse loput samaan tapaan. Selityksestä täytyy ilmetä jokaisen argumentin merkitys; esimerkiksi vihreän ympyrän selityksessä täytyy mainita  $3*\sin(t)$ ,  $3*\cos(t)$ ,  $t$ , 0 ja 7.

90. **3D-kuva.** Kolmiulotteisia kuvia voi piirtää hyvin samaan tapaan kuin kaksiulotteisia. Piirrä ensin kaksiulotteinen kuva ympyrästä ja sen päällä olevasta paraabelin kaaresta näin:

```
wxdraw2d(
 color=red,
 explicit(x^2+1,x,-1,1),
 color=green,
 implicit(x^2+y^2=1,x,-1,1,y,-1,1)
```

);

Piirrä sitten vastaava kolmiulotteinen kuva, jossa paraabelin  $x \mapsto x^2 + 1$  tilalla on paraboloidi  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 1$  ja ympyrän  $x^2 + y^2 = 1$  tilalla pallopinta  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Piirtokomennon nimeä täytyy vaihtaa kolmeen ulottuvuuteen sopivaksi ja komentoja täytyy vähän muokata kaksiulotteisesta tilanteesta. Tutki Maximian ohjeita tai kysy opettajilta.

91. **Hupia.** Piirrä `wxdraw3d`-komentoa jokin kuva. Käytä pisteitä, useita eksplisiittisiä funktioita ja useita implisiittisiä funktioita. Käytä myös useampaa väriä. Kerro, mitä kuvasi esittää.

92. **Harmoninen värähtelijä.** Fysiikan peruskursseilta saattaa olla tuttu jousen päässä värähtelevä punnus. Muistetaan, että harmonisen värähtelijän liike on sinimuotoista, joten sanotaan Maximalle, että paikka  $x$  riippuu ajasta  $t$  yhtälön  $x = A \sin(\omega t)$  mukaan: `x:A*sin(omega*t)`. Tässä  $A$  on värähtelyn amplitudi ja  $\omega$  kulmanopeus.

Olkoon jousen jousivakio  $k$  ja punnuksen massa  $m$ . Newtonin toinen laki tässä tilanteessa kuuluu  $-kx = ma$ , missä  $a$  on punnuksen kiihtyvyys. Lausekkeen  $ma + kx$  pitäisi siis olla nolla. Nimeä tämä lauseke Maximalle. Muista, että kiihtyvyys  $a$  on paikan  $x$  toinen derivaatta ajan suhteen.

Sievennä nimeämäsi lauseketta `factor`-komennolla ja anna sievennetylle lausekkeelle nimi. Tästä muodosta nähdään, että kertoimen  $m\omega^2 - k$  täytyy olla nolla. Poimitaan tämä tieto maximamaisesti käyttämällä `part`-komentoa. Kokeile vaikkapa komentoa `part(...,1,1)`, missä pisteiden tilalla on sievennetyn lausekkeesi nimi. Sinun pitäisi saada lauseke  $m\omega^2 - k$ ; nimeä se. Ratkaise `solve`-komentoa käyttäen  $\omega$  kun tiedetään, että viimeksi saatu lauseke on nolla. Voit halutessasi poimia `part`-komennolla tuloksesta haluamasi osan.

Näin on siis saatu Maximian avulla etsittyä värähtelevän punnuksen värähtelytaajuus massan ja jousivakion funktiona.

93. **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X ja Maxima.** Yhtälöitä ja muuta syötetään L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-ladontaohjelmalle hyvin eri tavalla kuin Maximalle. Kirjoita johonkin tex-tiedostoon (vaikka harjoitustyöpohjasi loppuun) tällaiset rivit:

```
\begin{equation}
x=\frac{\sin^3t-a}{\sqrt[4]{\log t}}.
\end{equation}
```

Kun teet pdf-tiedoston, näet yhtälön. Miten kirjoitat saman asian Maximalle muodossa `x:...`?

Maximalle voidaan määritellä lauseke vaikkapa näin:

```
q:(cos(3*t)-%pi)^(log(%e-2)).
```

Miten vastaava asia kirjoitettaisiin L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X:ssa?

Tämän tehtävän vastaus sisältyy kokonaan `wxm`-tiedostoon, pdf- tai tex-tiedostoja ei tarvita mukaan.

(Huomautus: Maxima-tiedoston voi muuttaa tex-tiedostoksi. Valitse Valikosta File -> Export ja valitse valikosta LaTeX. Myös HTML-sivun luonti onnistuu.)

94. **Hyvät viittauskäytännöt.** Viittaaminen edelliseen laskuun prosentilla tuottaa joskus ongelmia. Vielä suurempia ongelmia tuottaa tiettyyn output-soluun viittaaminen `%o41`-henkisesti. Poista harjoitustyöstäsi kaikki prosenttia käyttävät viittaukset. Sen sijaan anna laskujen tuloksille nimiä ja viittaa niiden nimiin.

Jos siis olet esimerkiksi kirjoittanut peräkkäisiin input-soluihin `factor(x^2-y^2)` sekä `ev(%,x=1,y=2)`, muokkaa ne muotoon `valitulos:factor(x^2-y^2)` sekä `ev(valitulos,x=1,y=2)`. Voit käyttää wxMaximan hakutoimintoa löytääksesi prosentit.

Neperin lukuun  $e$  (`%e`) ja lukuun  $\pi$  (`%pi`) prosentti kuuluu yhä.

Tämän tehtävän vastaukseksi riittää kommentti, jossa kerrot tehneesi nämä muutokset. Silloin työn hyväksyminen edellyttää, että yhtään prosenttiviitasta ei ole.

95. **Kertaus.** Mainitse viisi mielestäsi tärkeää Maxima-komentoa (esim. `diff`, `solve`...) ja anna esimerkki kunkin käytöstä. Kerro lyhyesti, mitä komennot tekevät.

96. **Algebralliset yhtälöryhmät.** Algebrallisen yhtälön ratkaisemiseen `solve` on hyvä komento. Vaikkapa yhtälöstä  $x^2 - 1 = 0$  voidaan ratkaista  $x$  komennolla `solve(x^2-1=0,x)` tai `solve(x^2-1,x)`. Ensin annetaan siis joko yhtälö tai lauseke (jonka nollakohtia etsitään jos ei toisin mainita) ja sitten muuttuja.

Yhtälöparin

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

ratkaiseminen taas tapahtuu kätevästi komennolla `algsys([x^2+y^2=2,x+y=1],[x,y])` tai `algsys([x^2+y^2-2,x+y-1],[x,y])`. Ensin annetaan siis lista yhtälöitä tai lausekkeita ja sen jälkeen lista ratkaistavia muuttujia.

Ratkaise `algsys`-komentoa käyttäen  $x$  yhtälöstä  $x^2 - 1 = 0$ . Tämä on yhtälöryhmä, jossa on yksi yhtälö ja yksi tuntematon muuttuja.

97. **Divergenssi.** Määrittele  $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $v(x,y) = (\sin(xy), y^2)$ , Maximalle. Voit tehdä sen listana, pystyvektorina tai vaakavektorina; lista lienee kätevin. Laske tämän vektorikentän divergenssi. (Tämä tehtävä onnistuu, jos fysiikan tai matematiikan opinnoista divergenssi on tuttu.)

98. **Tilastotyökaluja.** Tilastotieteeseen on olemassa omia erikoisohjelmistoja, mutta Maximallakin voi tehdä jotain. Tutustu ohjeen avulla komenttoon `test_normality` ja kokeile sitä johonkin esimerkkitapaukseen. Ohjeen lopussa on linkki ”stats”-nimiseen pakkaukseen, jossa on erilaisia tilastotyökaluja. Valitse sieltä jokin toinen komento, selitä mitä se tekee, ja käytä sitä johonkin yksinkertaiseen tilanteeseen. Kommentoi saamiasi tuloksia.

99. **Part.** Komennolla `part` voi poimia osia mistä hyvänsä listasta, lausekkeesta tai muusta. Nimeä yhtälö: `yhtalo:x^2-y^2=sin(t-cos(x))+log(2+%e^3)`; Miten saat komennolla `part(yhtalo,...)` poimittua yhtäsuuruusmerkin `=`, muuttujan  $t$  ja eksponentin  $3$ ?

100. Valitse jokin muun matematiikan kurssin tehtävä (calculus tai lineaarialgebra käy hyvin). Kerro, mikä tehtävä on. Ratkaise tehtävä Maximalla. Kerro, saitko saman tuloksen kuin käsin laskiessa. Kumpi oli tässä tilanteessa helpompaa, käsityö vai Maxima?